力学ICD演習解答例

演習9

1. 惑星(質量 m)と太陽(質量 M)の二体問題を考える。講義と異なる方法(エネルギーを時間微分する方法)で動径方向の運動方程式を導いてみよう。また、運動方程式を解かずにどのような運動が可能か調べる。まず、換算質量 $\mu \sim m$ なので、力学的エネルギー E は

$E = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{GMm}{r}$　(演-1)　と書ける。以下の問に答えよ。

(1) E は2次元の極座標で表すと $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$　(演-2) と書ける事を示せ。ただし、$L = mr^2\dot{\varphi}$　((6-2-5)式）である.

（**解答例**）(4-2-9)式より、$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + (r\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi$、$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2$ なので、これを（演-1)式に代入すると、

$E = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{GMm}{r}$.　これに、$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$ を代入し次のように（演-2)式が得られる。

$$E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \frac{L^2}{m^2 r^4} \right) - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

[間違いやすい点] $\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r$ だからといって、$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r$ とはならない。その理由は$\mathbf{e}_r$ も時間変化するからである。極座標の章を復習せよ。

(2)エネルギー保存則は $\frac{dE}{dt} = 0$ と書ける。(演-2)式を時間微分して、動径方向の運動方程式(6-2-7)、

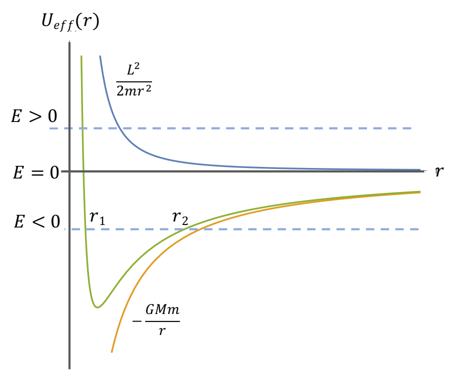
$$\ddot{r} + \frac{GM}{r^2} - \frac{L^2}{m^2 r^3} = 0 \qquad \text{(演-3)}$$

を導け。

（**解答例**）$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \right] = \frac{1}{2} m \cdot 2\dot{r}\ddot{r} + \frac{L^2}{2m}(-2)r^{-3}\dot{r} + \frac{1}{r^2}\dot{r}\,GMm = m\dot{r}\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3}\dot{r} + \frac{GMm}{r^2}\dot{r} = 0$

$m\dot{r}\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3}\dot{r} + \frac{GMm}{r^2}\dot{r} = 0$ の両辺を $m\dot{r}$ で割ると、動径方向の方程式 $\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2 r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0$ が得られる。

(3) 有効ポテンシャル　$U_{eff}(r) \equiv \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$ を定義すると、惑星の運動は（演-2)式より、あたかも、$U_{eff}(r)$ の下で１次元運動しているように見做すことができる。縦軸をエネルギー、横軸を r として$U_{eff}(r)$の概略の形を書きなさい。また、E の大きさを、$E > 0,\ E = 0,\ E < 0$とした時、それぞれどのような運動に対応するか調べなさい。（これを「**有効ポテンシャルの方法**」、と言う。）

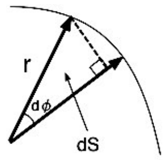


（**解答例と解説**）(演-2)式で $T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$ を運動エネルギーと考えれば、惑星は「有効的なポテンシャル」[1]$U_{eff}(r) \equiv \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$ の場の中で１次元運動しているとみなせる。上に$U_{eff}(r)$の図を示した。「万有引力のポテンシャル」$-\frac{GMm}{r}$と「遠心力のポテンシャル[2]」$\frac{L^2}{2mr^2}$ のグラフも示した。これらを足し合わせたものが$U_{eff}(r)$となる。原点付近で急速に正の方向に増加して行くことに注意せよ。　$U_{eff}(r)$を使うと、3-5節や演習６の問題１と同じように、力学的エネルギー E を与えて、そのポテンシャル中での運動として天体の運動を論じることができる。$T = E - U_{eff}(r) > 0$ の領域が運動可能の範囲となる。ただし、$\dot{r}$ は**動径方向の速度成分であることに注意する必要がある（$\dot{r}$がゼロでも偏角方向の速度成分はゼロと限らない）**。$E > 0$ の場合、１次元の運動として読み取ると、無限遠方からやってきた物体の速度は次第に加速され$U_{eff}(r)$の極小を与える位置で最大の早さになるが、その後急速に減速し、E と$U_{eff}(r)$ の交点（これを $r = r_{min}$ とする） でゼロ（静止）となる。しかし、$r > 0$ の方向へ力を受けているので、折り返して無限遠に帰っていく。これは、**2次元平面での運動に焼き直して考えると、無限遠方からやってきた天体が太陽近くで加速されるが、軌道が曲がってくるので、その動径方向の速度成分は近日点でゼロになり、太陽を周回した後、無限遠方に飛び去って行く**ことを示している。運動可能な領域は

[1] Ueffの添え字 eff は”effective”（有効的）の略

[2] 遠心力に関しては、後の方の章（回転座標系）で扱う。

$r \geq r_{min}$ であるから、円錐曲線の「双曲線の運動」に対応している。$E<0$ の場合、運動可能な領域はE と$U_{eff}(r)$ の２つの交点の間、$r_1 \leq r \leq r_2$ に制限される。**１次元の運動では、これは振動を表しているが、２次元平面での運動に焼き直して考えると円錐曲線の「楕円の運動」に対応**している。$E=0$ の場合は、ちょうど２つの交点を持つ場合と１つの交点を持つ場合の境界になっているので、これは「放物線」の運動に対応する[3]



2. Kepler の第 2 法則は面積速度一定であることを述べている。図を参考にして、 面積速度が$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$であることを求め、面積速度一定が角運動量保存と同等であることを示せ。 **（解答例**）右の図で $\mathbf{r}$ が $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ に移動する間にスウィープする面積をdS とすると、dSは $\mathbf{r}$ と$\mathbf{r}+d\mathbf{r}$の作る平行四辺形の面積の半分であるから、

$dS=\dfrac{1}{2}(r+dr)rd\varphi=\dfrac{1}{2}r^2d\varphi+\dfrac{1}{2}rdr\cdot d\varphi \approx \dfrac{1}{2}r^2d\varphi$ ここで、$dr\cdot d\varphi$ は微小量の二次の項であるからゼロとおいた。両辺をdt で割れば（極限をとれば）、$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\varphi}{dt}$ が得られる。よって、面積速度が一定ならば、

$L=mr^2\dot{\varphi}=2m\dfrac{dS}{dt}=\mathrm{const.}$となり、角運動量も一定となる（面積速度一定が角運動量保存と同等）。

3. Keplerの第３法則は公転周期 T の２乗が楕円軌道の長径 a の３乗に比例することを述べている。以下の設問に答えよ。
(1) T は楕円軌道に囲まれた面積を面積速度で割ったものであることを説明せよ。
（解答例）面積速度は一定なので、公転周期は楕円軌道に囲まれた面積を面積速度で割ったものになる。

(2) 面積速度は$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{1}{2}\sqrt{GM\lambda}$ と書けることを示せ。ここで、$\lambda=\dfrac{L^2}{GMm^2}$である（式(6-2-23)）

（解答例）$\dot{\varphi}=\dfrac{L}{mr^2}$ なので、$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{1}{2}r^2\dot{\varphi}=\dfrac{L}{2m}=\dfrac{1}{2m}\sqrt{GMm^2\lambda}=\dfrac{1}{2}\sqrt{GM\lambda}$

(3) 楕円の面積がπabであることと、$b=\sqrt{a\lambda}$ である事を使いKeplerの第３法則を導け。

（解答例）$T=\dfrac{\pi ab}{\frac{1}{2}\sqrt{GM\lambda}}=\dfrac{\pi a\sqrt{a\lambda}}{\frac{1}{2}\sqrt{GM\lambda}}$ なので、$T^2=\dfrac{4\pi^2}{GM}a^3.$　よって、$T^2 \propto a^3.$　（ $b=\sqrt{a\lambda}$ は次の問題の(3)参照）

4. 極方程式の式 $r(\varphi)=\dfrac{\lambda}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ を２次元の直交座標で表したい。$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ r=\sqrt{x^2+y^2}$ を使って以下のことを導け。

(1)　極方程式の式は $(1-\varepsilon^2)x^2+2\varepsilon\lambda x+y^2=\lambda^2$ と書ける（二次曲線）。

（解答例）$r(1+\varepsilon\cos\varphi)=r(1+\varepsilon\frac{x}{r})=(r+\varepsilon x)=\lambda$ より $r^2=x^2+y^2=(\lambda-\varepsilon x)^2=\lambda^2-2\varepsilon\lambda x+\varepsilon^2x^2.$ これを変形して与式となる。

(2)　$\varepsilon=1$ の時、放物線の式、$x=-\dfrac{1}{2\lambda}y^2+\dfrac{\lambda}{2}$ になる

（解答例） $\varepsilon=1$を代入すると $2\lambda x=\lambda^2-y^2$、$x=-\dfrac{1}{2\lambda}y^2+\dfrac{\lambda}{2}$　(横倒しの放物線で $x=0$ の時、$y=\pm\lambda$、$y=0$ の時、$x=\lambda/2$)

(3)　$0<\varepsilon<1$ の時、楕円の式、$\dfrac{(x+\varepsilon a)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ になる。ただし、$a=\dfrac{\lambda}{(1-\varepsilon^2)},\ b=\dfrac{\lambda}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}}$

（略解）(1)の二次曲線の式の両辺に$\dfrac{\lambda^2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$ を足して変形すると与式が得られる。なお、$x'\equiv x+\varepsilon a,\ y'\equiv y$ と置くと、$\dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}=1$ となるので、与式の原点（太陽のある位置）は楕円の中心より、$f=\varepsilon a$ だけ x 軸正の方向へずれている （f は焦点）。(3)の問題文の a,b の式より、$b=\sqrt{a\lambda}$ が得られる。

---

[3] p.51の円錐の図においても、放物線の場合は、円錐を切る面の傾きが、双曲線と楕円のちょうど境目になっている。